**Curso 2013-2014**

**Lógica – Examen de recuperación de lógica de primer orden 13-01-2014**

1.1. Formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados: *(2,5 puntos)*

1. *Ningún amigo de Pedro es profesor. (A(x,y) ≡ x es amigo de y, P(x) ≡ x es profesor)*
2. *Sólo los amigos de Juan imparten clase de historia. (A(x,y)≡ x es amigo de y, I(x,y) ≡ x imparte clase de la materia y)*
3. *Todos los enemigos de Pedro imparten clase de historia. (A(x,y)≡ x es amigo de y, I(x,y) ≡ x imparte clase de la materia y)*
4. *a ≡ Pedro* ¬ ∃x (A(x,a) ^ P(x))

o bien

∀x (A(x,a) → ¬P(x))

1. *a ≡ Pedro b ≡ Historia*

∀x (I(x,b) → A(x,a))

o bien

¬ ∃x (I(x,b) ^ ¬ A(x,a))

1. *a ≡ Pedro b ≡ Historia* ∀x (¬A(x,a) → I(x,b))

1.2. Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (umg) detallando el proceso de obtención del umg. (Nota: *x, y, z,* son símbolos de variable, y *a, b* son símbolos de constante).

1. P(g(z), h(y,z), a), P(g(y), h(f(x),z), x)
2. P(x, y, f(y)), P(f(y), g(b), f(a))

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Discordancia | Ligadura | Sustitución | Fórmulas resultantes de aplicar la sustitución |
|  |  |  | P(g(z), h(y,z), a) |
| P(g(y), h(f(x),z), x) |
| {z, y } | z/y | { z/y } | P(g(y), h(y,y), a) |
| P(g(y), h(f(x),y), x) |
| {y, f(x) } | y/f(x) | { z/f(x), y/f(x) } | P(g(f(x)), h(f(x), f(x)), a) |
| P(g(f(x)), h(f(x), f(x)), x) |
| {a, x } | x/a | { z/f(a), y/f(a), x/a } | P(g(f(a)), h(f(a), f(a)), a) |
| P(g(f(a)), h(f(a), f(a)), a) |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Discordancia | Ligadura | Sustitución | Fórmulas resultantes de aplicar la sustitución | |
|  |  |  | P(x, y, f(y)) | P(f(y), g(b), f(a)) |
| { x, f(y) } | x/f(y) | { x/f(y) } | P(f(y), y, f(y)) | P(f(y), g(b), f(a)) |
| { y, g(b) } | y/g(b) | { x/f(g(b)), y/g(b) } | P(f(g(b)), g(b), f(g(b))) | P(f(g(b)), g(b), f(a)) |
| { g(b), a } |  |  |  |  |

2. Demostrar con análisis semántico la siguiente relación de consecuencia lógica:

∃x (¬P(x) ∧ Q(x)) ⊨ ¬∀x (Q(x) → P(x))  *(2,5 puntos)*

Suponemos que un interpretación i es un modelo de ∃x (¬P(x) ∧ Q(x)) o sea

i (∃x (¬P(x) ∧ Q(x))) = V

=> i(∃x (¬P(x) ∧ Q(x))){x/a} = V para al menos una constante a

=> i(¬P(a) ∧ Q(a)) = V

=> i(Q(a)) = V, i(P(a) = F

=> i(Q(a) → P(a)) = F

=>no para cada constante a, i(Q(x) → P(x)){x/a}) = V

=> i(∀x (Q(x) → P(x))) = F

=> i(¬∀x (Q(x) → P(x))) = V.

Entonces cada modelo de ∀x (¬P(x) ∧ Q(x)) es un modelo de ¬∀x (Q(x) → P(x)), demostrando la relación de consecuencia lógica.

3. Demostrar mediante deducción natural, justificando cada paso y utilizando como mucho una regla derivada en un único paso de la demostración:

T [ ∀x∀y(P(y) → Q(x, y)) , ∀x(R(x, a)→ ¬Q(x, b)) , ∃zR(z, a) ] ⊢ ¬P(b) *(2,5 puntos)*

1. ∀x∀y(P(y) → Q(x, y)) prem.
2. ∀x(R(x, a)→ ¬Q(x, b)) prem.
3. ∃zR(z,a) prem.
4. R(c\*,a) elim. ∃, 3
5. R(c\*,a)→ ¬Q(c\*,b) elim. ∀, 2
6. ¬Q(c\*, b) elim. →, 4,5
7. ∀y(P(y) → Q(c\*, y)) elim. ∀, 1
8. P(b) → Q(c\*, b) elim. ∀, 7
9. ¬P(b) MT 6,8

4. Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado: *(2,5 puntos)*

C1: ¬Q(x) v P(x) v P(f(a))

C2: ¬P(x) v ¬S(x,x)  
C3: ¬P(x) v R(b,x) v S(b, x)

C4: ¬T(x,y) v ¬S(y,x)  
C5: ¬R(b,f(a))

C6: S(f(x),x)  
C7: T(f(a),b)

C8: Q(f(x))

R1: ¬S(b,f(a)) C4 con C7 y UMG {x/f(a), y/b}

R2: ¬P(f(a)) v R(b, f(a)) R1 con C3 y UMG {x/f(a)}

R3: ¬P(f(a)) R2 con C5

R4: ¬Q(x) v P(x) R3 con C1

R6: ¬Q(f(a)) R4 con R3 y UMG {x/f(a)}

R7: ⎕ R6 con C8 y UMG {x/a}

Otros soluciones posibles: factorización en C1 y después C8, C3, C6, C4 y C7 etc.